MACIERZE LOSOWE
LISTA 8
Wolne zmienne losowe

1. Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie NPP, niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ będą podalgebrami (z jednością) algebry $\mathcal{A}$, które są wolne względem φ. Wyznaczyć wzór na moment mieszany
$$\varphi(a_1 b_1 a_2 b_2),$$
gdzie $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1$, $b_1, b_2 \in \mathcal{A}_2$ w języku *momentów brzegowych*, czyli momentów postaci $\varphi(a), \varphi(b)$, gdzie $a \in \mathcal{A}_1$ oraz $b \in \mathcal{A}_2$.

2. Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie NPP, niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ będą podalgebrami (z jednością) algebry $\mathcal{A}$, które są wolne względem φ. Wyznaczyć wzór na moment mieszany
$$\varphi(a_1 b a_2 c)$$
gdzie $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1$, $b \in \mathcal{A}_2$, $c \in \mathcal{A}_3$ w języku *momentów brzegowych*.

3. Niech $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, gdzie $\mathcal{H}$ - przestrzeń Hilberta oraz niech $h \in \mathcal{H}$, taki że $\|h\| = 1$, $\varphi(T) = \langle T(h), h \rangle$.
   (a) Uzasadnić, że jeżeli przyjmiemy, że T^* oznacza sprzężenie hermitowskie, to $\mathcal{A}$ z tą operacją jest *-algebrą z jednością.
   (b) Uzasadnić, że para $(\mathcal{A}, \varphi)$ jest *-NPP (*-nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną), czyli, że φ jest liniowym znormalizowanym dodatnim funkcjonałem.

4. Niech $\mathcal{A} = \mathcal{B}(l^2)$ oraz niech $T : l^2 \to l^2$ będzie operatorem przesunięcia zadanym wzorem
$$T(e_n) = e_{n+1}$$
gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $(e_n)_{n \geq 1}$ jest ortonormalną bazą kanoniczną w l^2. Sprawdzić, że
$$\varphi(\omega^m) = \begin{cases} C_{m/2} & \text{gdy } m \text{ parzyste} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$
gdzie $\omega = T + T^*$ oraz $\varphi(.) = \langle .e_1, e_1 \rangle$.

5. Niech $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ będzie wolną przestrzeń Focka, gdzie $\mathcal{H}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Niech $\ell_j : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$ będzie operatorem liniowym zadanym na bazie przestrzeni Focka wzorami
$$\begin{aligned} \ell_j \Omega &= e_j \\ \ell_j(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}) &= e_j \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n} \end{aligned}$$
gdzie $j, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pokazać, że każdy operator ℓ_j jest izometrią na $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

(b) Wyznaczyć operator sprzężony do ℓ_j i jego działanie na wektory bazy przestrzeni Focka.

(c) Niech $\varphi(.) = \langle .\Omega, \Omega \rangle$ i niech $\omega_j = \ell_j + \ell_j^*$. Pokazać, że

$$\varphi(\omega_j^m) = \begin{cases} C_{m/2} & \text{gdy } m \text{ parzyste} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

dla dowolnego j. Każdy operator ω_j nazywa się *operatorem semicyrkularnym* (ponieważ ma rozkład Wignera zwany rozkładem semicyrkularnym) lub *wolnym operatorem Gaussowskim* (ponieważ pojawia się w CTG dla zmiennych wolnych).

(d) Pokazać, że na przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ zachodzi relacja

$$\ell_j^* \ell_k = \delta_{j,k} \mathrm{Id}$$

gdzie Id jest operatorem identycznościowym na tej przestrzeni.

6. Korzystając z relacji między ℓ_j^* oraz ℓ_k, uzasadnić, że każdy wielomian zmiennych wziętych ze zbioru operatorów $\{\ell_j, \ell_j^* : j \in \mathbb{N}\}$ można zredukować do kombinacji liniowej jednomianów postaci

$$\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_n} \ell_{k_1}^* \cdots \ell_{k_m}^*,$$

gdzie $n, m \geq 0$ (przyjmujemy, że jeżeli $m = n = 0$, to taki jednomian jest operatorem identycznościowym). Wyznaczyć tę postać dla wielomianów postaci

$$\ell_1 \ell_2^* \ell_2 \ell_1, \quad \ell_1^* \ell_2^* \ell_2 \ell_1, \quad \ell_3^* \ell_3^* \ell_3 \ell_2^* \ell_2^2 \ell_1^*, \quad \omega_1 \omega_2, \quad \omega_1 \omega_2 \omega_1 \omega_2.$$

7. Korzystając z zadania 6, wyznaczyć postać ogólną dowolnego zredukowanego wielomianu stopnia $0, 1, 2, 3$ zmiennych ℓ_j, ℓ_j^* przy ustalonym j. Następnie, uogólnić ten rezultat dla dowolnego wielomianu zmiennych ℓ_j, ℓ_j^* przy ustalonym j.

8. Uzasadnić, że każdy wielomian w zmiennych ℓ_j, ℓ_j^* który jest zawarty w $\mathrm{Ker}(\varphi)$, ma po zredukowaniu do postaci kanonicznej z zadania 6 wyraz wolny równy zeru. Dla wielomianów P postaci

$$\ell_1 \ell_2^* \ell_2 \ell_1 - \ell_1^* \ell_1 + \ell_2 \ell_2^*, \quad \omega_j^2, \quad \omega_j^4, \quad \omega_j^4 - 2\omega_j^2$$

wyznaczyć postać zredukowaną, a następnie obliczyć $\varphi(P)$ oraz $P^0 = P - \varphi(P) 1_{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A} = B(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$.

9. Wyznaczyć postać ogólną dowolnego zredukowanego wielomianu zmiennych ℓ_j, ℓ_j^*, który należy do $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (przy ustalonym j).

10. Niech $\mathcal{A}_j = \mathrm{alg}(\ell_j, \ell_j^*)$, $j \in \mathbb{N}$. Pokazać, że rodzina algebr $\mathcal{A}_j$ jest wolna względem funkcjonału φ, gdzie notacja jest jak w zadaniu 5.

    Komentarz. Symbol $\mathrm{alg}(\ell_j, \ell_j^*)$ oznacza algebrę z jednością generowaną przez operatory ℓ_j, ℓ_j^*, czyli algebrę wielomianów tych zmiennych z uwzględnieniem relacji pokazanych w zadaniu 5d.

Romuald Lenczewski